

盒友的小难题

by 海星在晒太阳

2024 年 11 月 19 日

前两天在小黑盒上看见有喝油在问这道题，看见了就顺手做一下。题目：如图，求角度

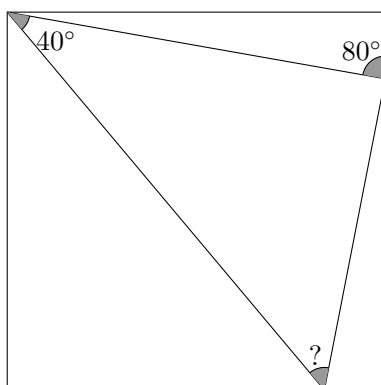


图 1:

这道题是典型的少条件，网上的钓鱼题大部分都有这样的特征：乍一看十分容易，实际上条件缺失根本做不出来。为了能解这道问题，我们给它补上条件。这里先假定它是正方形，这也是大部分人看到图片的第一感觉。

如图，在正方形 $ABCD$ 中，已知 $\angle CED = 80^\circ$, $\angle FDE = 40^\circ$, 求 $\angle DFE$

解：不妨设正方形边长为 1，利用三角函数表示出各条边长

$BE = 1 - \tan 10^\circ$, $BF = 1 - \tan 40^\circ$ ，根据勾股定理，我们可以得到 $\triangle DEF$ 的三边：

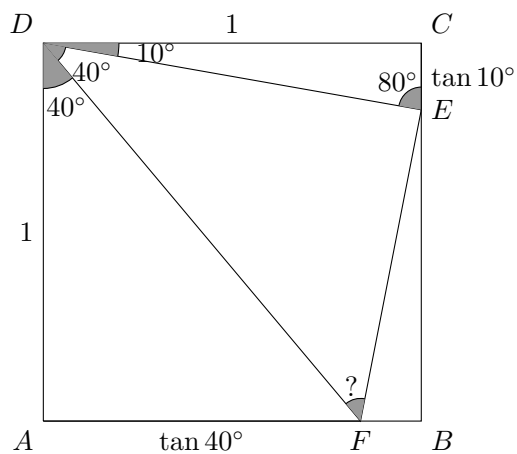


图 2:

$$DE = \sqrt{DC^2 + CE^2} = \sqrt{1^2 + \tan^2 10^\circ},$$

$$DF = \sqrt{AD^2 + AF^2} = \sqrt{1^2 + \tan^2 40^\circ},$$

$$EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = \sqrt{(1 - \tan 40^\circ)^2 + (1 - \tan 40^\circ)^2}.$$

之后就是解 $\triangle DEF$ ，利用正弦定理：

$$\frac{EF}{\sin \angle EDF} = \frac{DE}{\sin \angle DFE}$$

或者余弦定理：

$$\cos \angle DFE = \frac{DF^2 + EF^2 - DE^2}{2 * DF * EF}$$

可以解出 $\angle DFE \approx 51.05324822^\circ$

现在来研究更一般的情况，我们把条件放宽一点，假设是在一个长宽比为 $a(a > 1)$ 的矩形之中，那么结果又是多少呢？

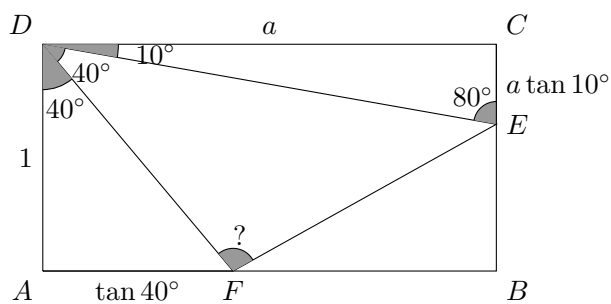


图 3:

如图 4 所示，采用和正方形相似的思路，可以标注出各边长度，然后解 $\triangle DEF$ 得

$$\angle DFE = \arcsin \left[\frac{a\sqrt{1 + \tan^2 10^\circ}}{\sqrt{a^2(1 - \tan 10^\circ)^2 + (a - \tan 40^\circ)^2}} \sin 40^\circ \right]$$